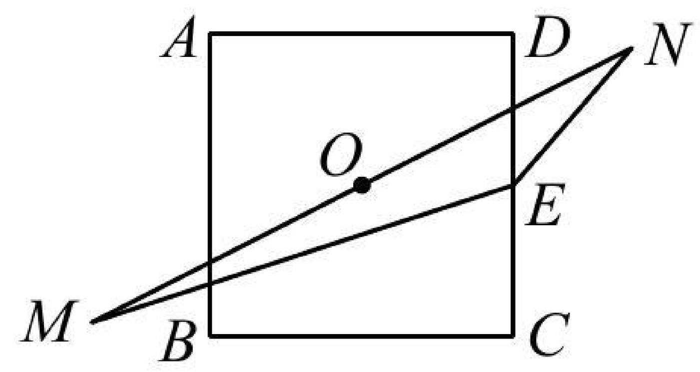
第 2 节 数量积的常见几何方法（★★★）

强化训练

1.（2023 • 山东潍坊模拟 • ★★）如图，在边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中，其对称中心 O 平分线段 MN，且 $MN=2BC$，点 E 为 CD 的中点，则 $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EN}=$_____.



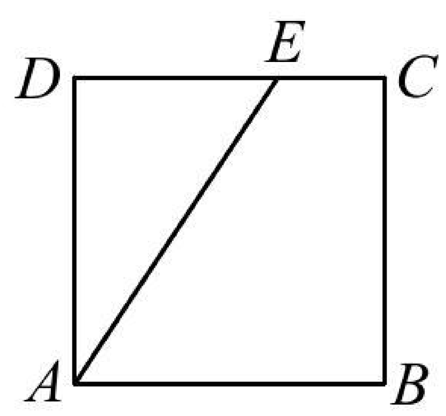
答案：-3

解析：$\overrightarrow{EM}$，$\overrightarrow{EN}$ 共起点，且中线和底边都好算，故用极化恒等式求 $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EN}$，

由题意，$|\overrightarrow{EO}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|=1$，$|\overrightarrow{OM}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{MN}|=|\overrightarrow{BC}|=2$，

由极化恒等式，$\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EN}=|\overrightarrow{EO}|^2-|\overrightarrow{OM}|^2=1^2-2^2=-3$.

2.（★★）如图，边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中，E 是线段 CD 上的动点，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围是_____.



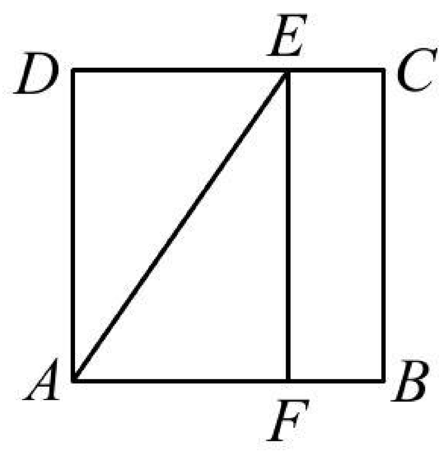
答案：$[0,1]$

解析：观察图形发现 $\overrightarrow{AB}$ 不变，$\overrightarrow{AE}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量好找，故可用投影法求 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}$，

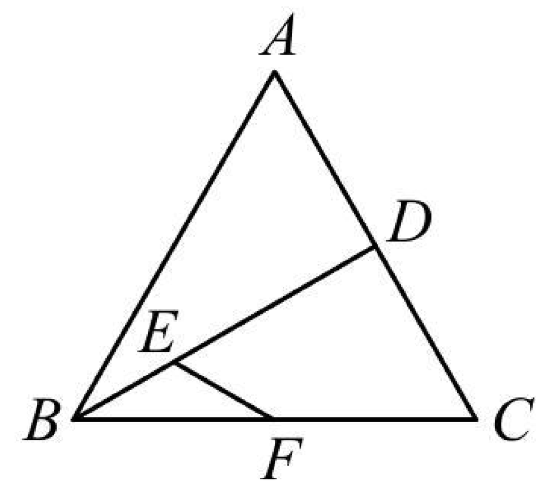
如图，作 $EF\perp AB$ 于 F，则 $\overrightarrow{AE}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量为 $\overrightarrow{AF}$，

所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AF}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos 0^{\circ}=|\overrightarrow{AF}|$，

当 E 在线段 CD 上运动时，F 在线段 AB 上运动，所以 $0\le|\overrightarrow{AF}|\le 1$，故 $0\le\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}\le 1$.



3.（2023 • 山东模拟 • ★★）如图，边长为 2 的正 ΔABC 中，D 为 AC 中点，E 在线段 BD 上，且 $BD=3BE$，F 为 BC 中点，则 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AC}=$_____.



答案：1

解法 1：$\overrightarrow{EF}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 不共起点，不方便使用极化恒等式，注意到 $\overrightarrow{BA}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 知道长度和夹角，故可用拆解法，

由题意，$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$=-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$，

所以 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AC}=(-\frac{1}{6}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})$

$=-\frac{1}{6}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BA}^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}^2-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BA}^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}^2$

$=-\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\cos 60^{\circ}+\frac{1}{6}\times 2^2+\frac{1}{3}\times 2^2=1$.

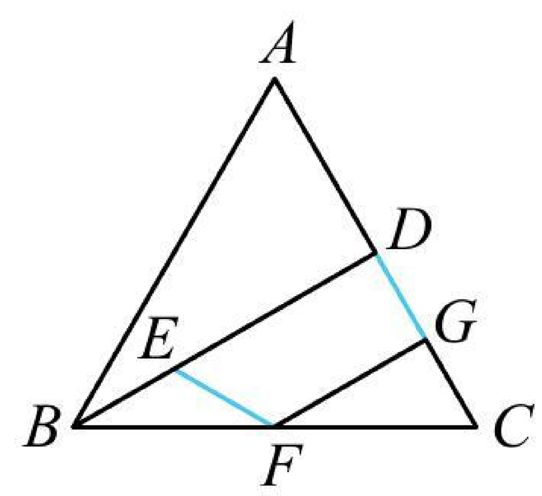
解法 2：观察发现 E 和 F 在 AC 上的垂足都好找，即 $\overrightarrow{EF}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的投影向量好找，故也可用投影法求 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AC}$，

由题意，$BD\perp AC$，如图，作 $FG\perp AC$ 于点 G，

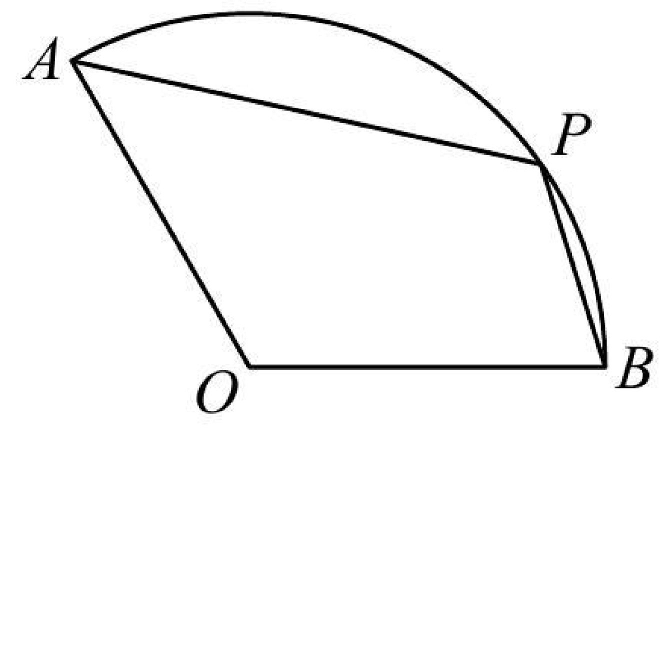
则 $FG// BD$，因为 F 为 BC 中点，所以 G 为 CD 中点，

$\overrightarrow{EF}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的投影向量即为 $\overrightarrow{DG}$，

所以 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{DG}|\cdot|\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|^2=1$.



4.（★★★）如图，扇形 AOB 的圆心角为 120°，半径为 2，P 是圆弧 AB 上的动点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值是_____.



答案：-2

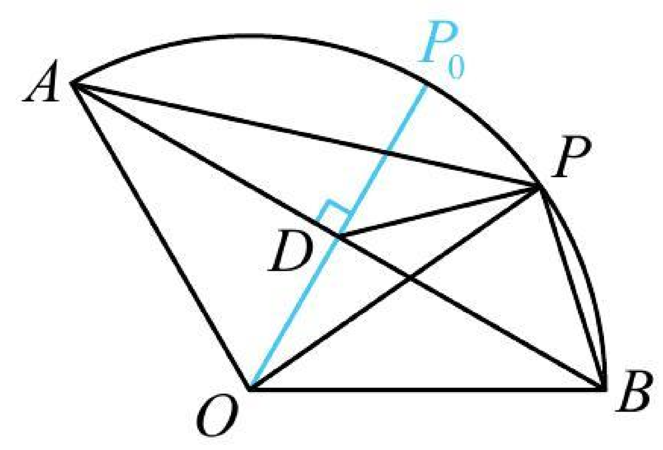
解析：$\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PB}$ 共起点，且底边长不变，故用极化恒等式计算 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$，

如图，设 AB 中点为 D，由极化恒等式，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|PD|^2-|AD|^2$，

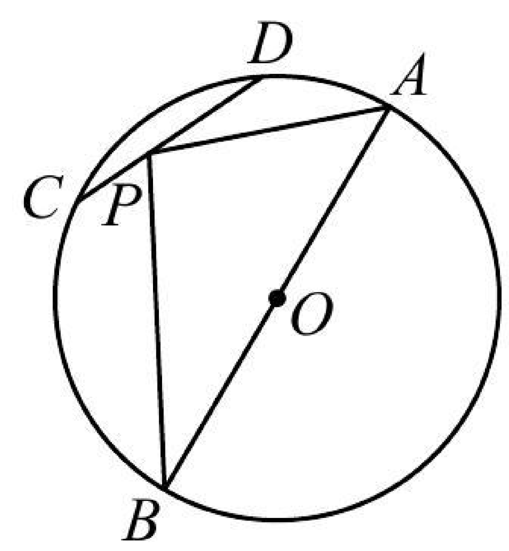
而 $|AD|=|OA|\sin\angle AOD=2\sin 60^\circ=\sqrt{3}$，所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|PD|^2-|AD|^2=|PD|^2-3$ ①，故只需求 $|PD|$ 的最小值，

由三角形两边之差小于第三边可知，$|PD|\ge|OP|-|OD|=|OP_0|-|OD|=|P_0D|$，所以当 P 与图中 P_0 重合时，$|PD|$ 最小，

且 $|PD|_{\min}=|P_0D|=|OP_0|-|OD|=2-|OA|\cos\angle AOD=2-2\cos 60^\circ=1$，代入①得 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值是 -2.



5．（2022·浙江杭州模拟·★★★）圆是中华民族传统文化的形态象征，象征着“圆满”和“饱满”，是自古以和为贵的中国人所崇尚的图腾. 如图，AB 是圆 O 的一条直径，且 $|AB|=4$，C，D 是圆 O 上的任意两点，$|CD|=2$，点 P 在线段 CD 上，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值是_____.



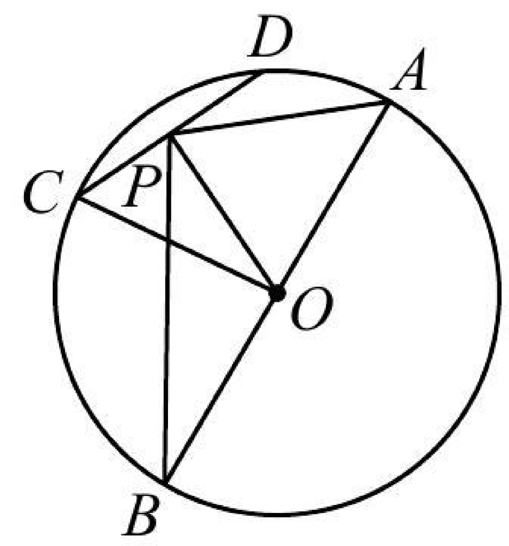
答案： -1

解析： $\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PB}$ 共起点，且底边长不变，考虑用极化恒等式求 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$，

如图，由极化恒等式，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|PO|^2-|OA|^2=|PO|^2-4$ ①，

故只需求 $|PO|$ 的最小值，当 $PO\perp CD$ 时，$|PO|$ 最小，此时 P 为 CD 中点，

所以 $|PO|_{\min}=\sqrt{|OC|^2-|PC|^2}=\sqrt{3}$，代入①得 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值为 -1.



6．（2020·新高考Ⅰ卷·★★★）已知 P 是边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$ 内的一点，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围是（　　）

（A）$(-2,6)$　（B）$(-6,2)$　（C）$(-2,4)$　（D）$(-4,6)$

答案： A

解析： $\overrightarrow{AB}$ 不变，$\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量也容易分析，故用投影法求 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$，

如图，作 $CH\perp AB$ 于 H，$FG\perp AB$ 于 G，为了便于阐述，不妨假设 P 也能取边界，

则当 P 与 C 重合时，$\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量为 $\overrightarrow{AH}$，此时投影向量与 $\overrightarrow{AB}$ 同向且长度最大，

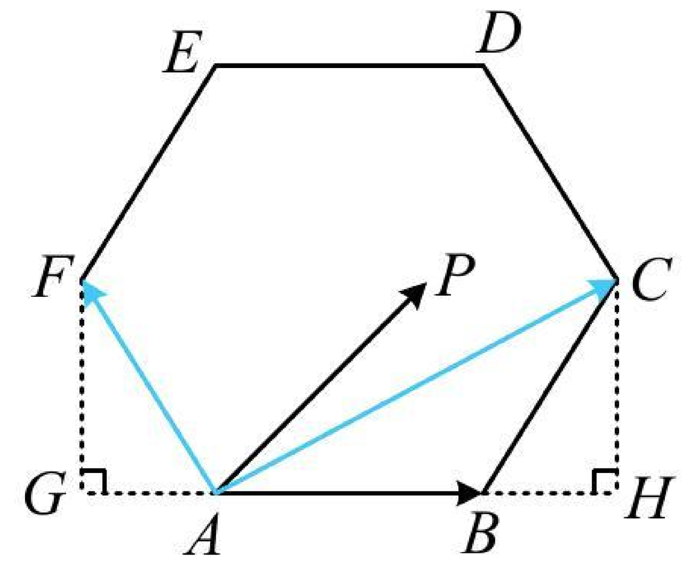
且 $|\overrightarrow{AH}|=|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BH}|=2+|\overrightarrow{BC}|\cos\angle CBH=2+2\cos 60^{\circ}=3$，

所以 $(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB})_{\max}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AH}|\cdot\cos 0^{\circ}=2\times 3\times 1=6$；

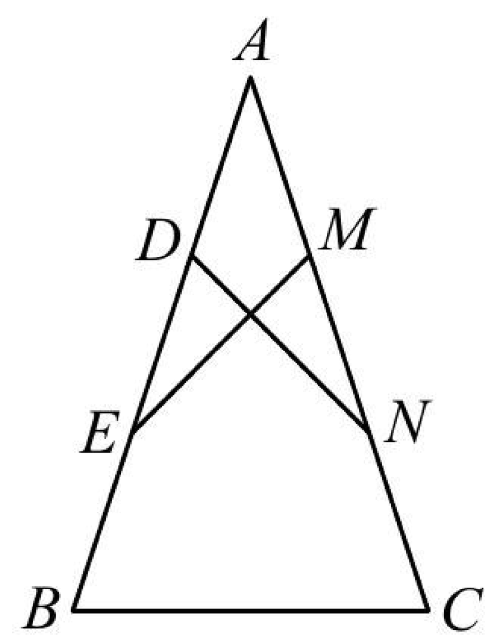
当 P 与 F 重合时，$\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量为 $\overrightarrow{AG}$，此时投影向量与 $\overrightarrow{AB}$ 反向且长度最大，

且 $|\overrightarrow{AG}|=|\overrightarrow{AF}|\cos\angle FAG=2\cos 60^{\circ}=1$，所以 $(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB})_{\min}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AG}|\cdot\cos 180^{\circ}=2\times 1\times(-1)=-2$；

因为 P 只能在正六边形 $ABCDEF$ 内部运动，不能取边界，所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围是 $(-2,6)$.



7.（2022 • 天津模拟 • ★★★）如图，在等腰 ΔABC 中，$AB=AC=3$，D，E 与 M，N 分别是 AB，AC 的三等分点，且 $\overrightarrow{DN}\cdot\overrightarrow{ME}=-1$，则 $\tan A=$_____，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$_____.



答案： $\frac{4}{3}$；$-\frac{18}{5}$

解析： 投影向量不易分析，也没有固定的底边，可尝试拆解法，AB，AC 给了长度，虽不知道夹角，但若选 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 为基底，代入 $\overrightarrow{DN}\cdot\overrightarrow{ME}=-1$ 正好可求出夹角 A，

由题意，$\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，

$\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，

所以 $\overrightarrow{DN}\cdot\overrightarrow{ME}=(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC})\cdot(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB})$

$=-\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}^2-\frac{2}{9}\overrightarrow{AC}^2+\frac{5}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{2}{9}\times 9-\frac{2}{9}\times 9+$

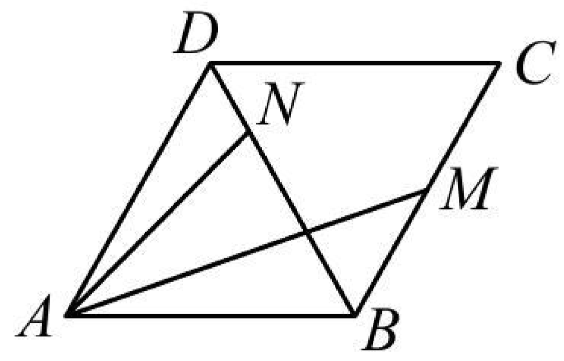
$\frac{5}{9}\times 3\times 3\times\cos A=-4+5\cos A=-1$，解得：$\cos A=\frac{3}{5}$，

结合 $0<A<\pi$ 可得 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{4}{5}$，

所以 $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{4}{3}$，故 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}^2=3\times3\times\frac{3}{5}-3^2=-\frac{18}{5}$.

8.（2022 • 天津模拟 • ★★★）如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$\angle BAD=60^\circ$，若 M 为 BC 的中点，N 是线段 BD 上的动点，则 $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AM}$ 的取值范围为_____.



答案：$[4,5]$

解析：$\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AD}$ 长度夹角都已知，选它们为基底表示 $\overrightarrow{AN}$ 和 $\overrightarrow{AM}$，再计算数量积，

由题意，可设 $\overrightarrow{BN}=\lambda\overrightarrow{BD}(0\le\lambda\le1)$，则 $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$

$=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\lambda(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}$，

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，

所以 $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AM}=[(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}]\cdot(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD})$

$=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}^2+\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AD}^2+\frac{1+\lambda}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=(1-\lambda)\cdot4+\frac{\lambda}{2}\cdot4+\frac{1+\lambda}{2}\cdot2\times2\times\cos60^\circ=5-\lambda$，

因为 $0\le\lambda\le1$，所以 $4\le\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AM}\le5$.